

Κωνσταντίνος Ρεκούμης

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

+

345 789

ΝΕΑ

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΕΝΗ ΕΚΔΟΣΗ

Σύμφωνα με τις οδηγίες  
για τη διδασκαλία  
και την αξιολόγηση  
του μαθήματος

1 2 6

×

ΜΕΤΑΙΧΜΙΟ



# Περιεχόμενα

Προλογικό σημείωμα .....	9
--------------------------	---

## ΑΛΓΕΒΡΑ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

<b>1.1 Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις</b> .....	13
Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	17
Κριτήριο αξιολόγησης .....	22
<b>1.2 Εξισώσεις α΄ βαθμού</b> .....	23
Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	31
Κριτήριο αξιολόγησης .....	39
<b>1.3 Επίλυση τύπων</b> .....	40
Ασκήσεις για λύση .....	43
<b>1.4 Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων</b> .....	46
Ασκήσεις για λύση .....	49
<b>1.5 Ανισώσεις α΄ βαθμού</b> .....	54
Ασκήσεις για λύση .....	58
Κριτήρια αξιολόγησης .....	64

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

<b>2.1 Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού</b> .....	67
Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	72
Κριτήριο αξιολόγησης .....	78
<b>2.2 Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί</b> .....	79
Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	85
Κριτήριο αξιολόγησης .....	88
<b>2.3 Προβλήματα</b> .....	89
Ασκήσεις για λύση .....	92
Κριτήριο αξιολόγησης .....	96

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**

<b>3.1 Η έννοια της συνάρτησης</b> .....	99
Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	105
Κριτήριο αξιολόγησης .....	110
<b>3.2 Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης</b> .....	111
Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	125
Κριτήριο αξιολόγησης .....	131
<b>3.3 Η συνάρτηση <math>y = ax</math></b> .....	132
Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	137
Κριτήριο αξιολόγησης .....	141
<b>3.4 Η συνάρτηση <math>y = ax + \beta</math></b> .....	142
Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	150
Κριτήριο αξιολόγησης .....	154
<b>3.5 Η συνάρτηση <math>y = \frac{a}{x}</math> – Η υπερβολή</b> .....	155
Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	160
Κριτήριο αξιολόγησης .....	163

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

<b>4.1 Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός – Δείγμα</b> .....	167
Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	169
Κριτήριο αξιολόγησης .....	171
<b>4.2 Γραφικές παραστάσεις</b> .....	172
Ασκήσεις για λύση .....	177
<b>4.3 Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων</b> .....	180
Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	185
Κριτήριο αξιολόγησης .....	189
<b>4.4 Ομαδοποίηση παρατηρήσεων</b> .....	190
Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	193
Κριτήριο αξιολόγησης .....	196
<b>4.5 Μέση τιμή – Διάμεσος</b> .....	197
Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	203
Κριτήριο αξιολόγησης .....	206

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ – ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

<b>1.1</b>	<b>Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας</b> .....	209
	Ασκήσεις για λύση .....	211
<b>1.2</b>	<b>Μονάδες μέτρησης επιφανειών</b> .....	214
	Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	217
<b>1.3</b>	<b>Εμβαδά επίπεδων σχημάτων</b> .....	219
	Ασκήσεις για λύση .....	225
	Κριτήριο αξιολόγησης .....	232
<b>1.4</b>	<b>Πυθαγόρειο θεώρημα</b> .....	233
	Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	238
	Κριτήριο αξιολόγησης .....	243

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ – ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

<b>2.1</b>	<b>Εφαπτομένη οξείας γωνίας</b> .....	247
	Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	252
	Κριτήριο αξιολόγησης .....	258
<b>2.2</b>	<b>Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας</b> .....	259
	Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	263
	Κριτήριο αξιολόγησης .....	268
<b>2.3</b>	<b>Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης</b> .....	269
	Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	270
<b>2.4</b>	<b>Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών <math>30^\circ</math>, <math>45^\circ</math> και <math>60^\circ</math></b> .....	272
	Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	276
	Κριτήριο αξιολόγησης .....	281
<b>2.5</b>	<b>Η έννοια του διανύσματος</b> .....	282
	Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	286
<b>2.6</b>	<b>Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων</b> .....	289
	Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	292
<b>2.7</b>	<b>Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες</b> .....	294
	Ασκήσεις για λύση .....	296
	Κριτήριο αξιολόγησης .....	298

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

<b>3.1</b>	<b>Εγγεγραμμένες γωνίες</b> .....	301
	Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	306
	Κριτήριο αξιολόγησης .....	314
<b>3.2</b>	<b>Κανονικά πολύγωνα</b> .....	315
	Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	321
	Κριτήριο αξιολόγησης .....	325
<b>3.3</b>	<b>Μήκος κύκλου</b> .....	326
	Ασκήσεις για λύση .....	328
<b>3.4</b>	<b>Μήκος τόξου</b> .....	331
	Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	335
	Κριτήριο αξιολόγησης .....	340
<b>3.5</b>	<b>Εμβαδόν κυκλικού δίσκου</b> .....	341
	Ασκήσεις για λύση .....	343
	Κριτήριο αξιολόγησης .....	346
<b>3.6</b>	<b>Εμβαδόν κυκλικού τομέα</b> .....	347
	Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	350
	Κριτήριο αξιολόγησης .....	355

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ – ΜΕΤΡΗΣΗ ΣΤΕΡΕΩΝ

<b>4.1</b>	<b>Ευθείες και επίπεδα στον χώρο</b> .....	359
	Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	364
<b>4.2</b>	<b>Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου</b> .....	367
	Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	372
<b>4.3</b>	<b>Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου</b> .....	375
	Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	379
<b>4.4</b>	<b>Η πυραμίδα και τα στοιχεία της</b> .....	382
	Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	386
<b>4.5</b>	<b>Ο κώνος και τα στοιχεία του</b> .....	389
	Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	392
<b>4.6</b>	<b>Η σφαίρα και τα στοιχεία της</b> .....	395
	Ερωτήσεις και ασκήσεις για λύση .....	398
	<b>Απαντήσεις στις ασκήσεις και στα κριτήρια αξιολόγησης</b> .....	401
	<b>Απαντήσεις στις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου</b> .....	545

# Άλγεβρα

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

### Εξισώσεις – Ανισώσεις

- 1.1 Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις
- 1.2 Εξισώσεις α' βαθμού
- 1.3 Επίλυση τύπων
- 1.4 Επίλυση προβλημάτων με τη βοήθεια εξισώσεων
- 1.5 Ανισώσεις α' βαθμού



## 1.1 Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις

### A | Η έννοια της μεταβλητής

- Η έννοια αυτή μας είναι ήδη γνωστή. Με χρήση μιας μεταβλητής μπορούμε να εκφράσουμε με μαθηματικό τρόπο φράσεις όπως:

#### Παράδειγμα

Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 2. Έτσι, αν συμβολίσουμε με  $x$  τον αριθμό της φράσης αυτής, τότε με μαθηματικό τρόπο τη γράφουμε ως:

$$3x + 2$$

Το γράμμα  $x$  λέγεται **μεταβλητή** και ο αριθμός 3 λέγεται **συντελεστής** του  $x$ .

- Γενικά:

*Μεταβλητή λέγεται ένα γράμμα που το χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε έναν οποιοδήποτε αριθμό ενός συνόλου.*

### B | Αλγεβρικές παραστάσεις

- Γνωρίζουμε ότι αριθμητική παράσταση λέγεται μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς.

Αν τώρα, εκτός του αριθμού σε μια παράσταση εμφανίζονται μία ή περισσότερες μεταβλητές, όπως στην παράσταση  $3x + 2$ , τότε αυτή λέγεται **αλγεβρική παράσταση**.

- Όστε:

*Αλγεβρική παράσταση λέγεται μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές.*

## Η επιμεριστική ιδιότητα – Αναγωγή ομοίων όρων

- Έχουμε χρησιμοποιήσει την επιμεριστική ιδιότητα, κυρίως στη μορφή της:

$$a \cdot (\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma$$

### Παράδειγμα

Έχουμε:

$$2 \cdot (x - 3) = 2x - 6, 3 \cdot (y + 4) = 3y + 12$$

- Χρήσιμη είναι και η μορφή της:

$$a\gamma + \beta\gamma = (a + \beta) \cdot \gamma$$

### Παράδειγμα

Γράφουμε:

$$2x + 3x = (2 + 3) \cdot x \quad \text{ή} \quad 2x + 3x = 5x$$

- Οι όροι  $2x$ ,  $3x$  κ.λπ. που περιέχουν την ίδια μεταβλητή λέγονται **όμοιοι όροι**. Η διαδικασία με την οποία απλοποιήσαμε την παράσταση  $2x + 3x$  και τη γράψαμε ως  $5x$  λέγεται **αναγωγή ομοίων όρων**.

- Θυμίζουμε ότι το σύμβολο « $\cdot$ » του πολλαπλασιασμού μεταξύ μεταβλητών ή μεταξύ αριθμού και μεταβλητής παραλείπεται. Έτσι, αντί για  $a \cdot \beta$ , γράφουμε  $a\beta$ , αντί για  $2 \cdot x$ , γράφουμε  $2x$ .

Αντίθετα, γράφουμε το σύμβολο αυτό όταν έχουμε γινόμενο αριθμών ή όταν θέλουμε να αποφύγουμε παρανοήσεις. Έτσι, δεν παραλείπεται όταν γράφουμε  $2 \cdot 4$  ή  $x \cdot 2$ .

Τέλος γράφουμε  $x$  αντί του  $1 \cdot x$ , και  $-x$  αντί του  $-1 \cdot x$ , γιατί το γινόμενο ενός αριθμού με τη μονάδα ισούται με τον αριθμό αυτό:

$$1 \cdot x = x \quad \text{και} \quad -1 \cdot x = -x$$

## Άσκηση 1

Να γράψετε με τη βοήθεια μιας μεταβλητής τις παρακάτω εκφράσεις:

- Το διπλάσιο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 3 ισούται με τον αριθμό αυτό.
- Δύο φίλοι μοιράστηκαν ένα χρηματικό ποσό. Ο ένας πήρε το  $\frac{1}{3}$  του ποσού και 10 € ακόμη και ο άλλος τα υπόλοιπα. Με τη βοήθεια μιας μεταβλητής να γράψετε το ποσό που πήρε ο καθένας.

**Λύση**

α. Έστω  $x$  ένας αριθμός. Το διπλάσιό του είναι  $2x$ , το οποίο ελαττωμένο κατά 3 είναι:

$$2x - 3$$

β. Έστω  $x$  το χρηματικό ποσό που μοιράστηκαν. Το  $\frac{1}{3}$  του ποσού είναι  $\frac{1}{3}x$ , το οποίο, αν του προσθέσουμε 10 €, γίνεται:

$$\frac{1}{3}x + 10$$

Αυτό είναι το ποσό που πήρε ο πρώτος από τους δύο φίλους. Το ποσό που πήρε ο δεύτερος είναι ίσο με το αρχικό ποσό  $x$  μείον το παραπάνω ποσό του πρώτου, δηλαδή:

$$x - \left(\frac{1}{3}x + 10\right)$$

**Άσκηση 2**

Δίνεται η παράσταση:

$$-4x + 2x + 4$$

- Να τη χαρακτηρίσετε ως αριθμητική ή αλγεβρική παράσταση.
- Να αντικαταστήσετε το  $x$  με την τιμή  $-2$  και να χαρακτηρίσετε τη νέα παράσταση ως αριθμητική ή αλγεβρική.

**Λύση**

- Η παράσταση  $-4x + 2x + 4$  περιλαμβάνει πράξεις μεταξύ αριθμών και της μεταβλητής  $x$ , επομένως είναι αλγεβρική παράσταση.
- Αν αντικαταστήσουμε το  $x$  με την τιμή  $-2$ , τότε το  $-2$  γράφεται μέσα σε παρένθεση ως  $(-2)$ . Έτσι η παράσταση  $-4x + 2x + 4$  γίνεται:

$$-4(-2) + 2(-2) + 4$$

Η τελευταία παράσταση περιλαμβάνει πράξεις μόνο μεταξύ αριθμών, επομένως είναι αριθμητική πράσταση.

**Άσκηση 3**

Να κάνετε τις πράξεις:

α.  $3(x - 4)$       β.  $-2(x + 3)$       γ.  $-4(-3 - x)$

**Λύση**

α. Σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα, το εξαγόμενο του  $3(x - 4)$  προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε το 3 με το  $x$  και με το  $-4$  και αθροίσουμε τα δύο γινόμενα:

$$3(x - 4) = 3x - 3 \cdot 4 = 3x - 12$$

β. Ομοίως βρίσκουμε:  $-2(x + 3) = -2 \cdot x - 2 \cdot 3 = -2x - 6$ .

γ. Ομοίως βρίσκουμε:  $-4(-3 - x) = -4(-3) - 4(-x) = 12 + 4x$ .

#### Άσκηση 4

Να κάνετε αναγωγή ομοίων όρων στις παραστάσεις:

α.  $-2x + 5x$    β.  $4x - 2x + 3x$    γ.  $x + 2x + y + 3y$    δ.  $-3x + 2y - 4x - 3y - x$

#### Λύση

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα στη μορφή της:

$$a\gamma + b\gamma = (a + b)\gamma \quad \text{ή} \quad a\gamma - b\gamma = (a - b)\gamma$$

Η ιδιότητα αυτή ισχύει και για περισσότερους των δύο όρων, π.χ.:

$$a\gamma - b\gamma - \delta\gamma = (a - b - \delta)\gamma$$

α. Έχουμε:  $-2x + 5x = (-2 + 5)x = 3x$ .

β. Έχουμε:  $4x - 2x + 3x = (4 - 2 + 3)x = 5x$ .

γ. Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα μία φορά για τη μεταβλητή  $x$  και μία φορά για τη μεταβλητή  $y$ :

$$x + 2x + y + 3y = (1 + 2)x + (1 + 3)y = 3x + 4y$$

δ. Ομοίως έχουμε:

$$-3x + 2y - 4x - 3y - x = -3x - 4x - x + 2y - 3y = (-3 - 4 - 1)x + (2 - 3)y = -8x - y$$

#### Άσκηση 5

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α.  $2(x - 1) - 3(2x + 1)$    β.  $3(-x + 2) + 2(4x - 1)$

#### Λύση

Πρώτα εκτελούμε τις πράξεις και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

α. Έχουμε κατά σειρά:

$$\begin{aligned} 2(x - 1) - 3(2x + 1) &= 2x - 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2x - 3 \cdot 1 \\ &= 2x - 2 - 6x - 3 \\ &= (2 - 6)x - 2 - 3 \\ &= -4x - 5 \end{aligned}$$

β. Έχουμε κατά σειρά:

$$\begin{aligned} 3(-x + 2) + 2(4x - 1) &= -3x + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4x - 2 \cdot 1 \\ &= -3x + 6 + 8x - 2 \\ &= -3x + 8x + 6 - 2 \\ &= (-3 + 8)x + 4 \\ &= 5x + 4 \end{aligned}$$

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

### Ερωτήσεις θεωρίας

1. Τι λέμε αριθμητική παράσταση;
2. Τι λέμε αλγεβρική παράσταση;
3. Τι λέμε μεταβλητή;
4. Ποιοι όροι λέγονται όμοιοι όροι; Να γράψετε ένα παράδειγμα 3 ομοίων ορίων.
5. Να γράψετε την επιμεριστική ιδιότητα.

### Ασκήσεις

6. Με τη βοήθεια μίας ή περισσότερων μεταβλητών να γράψετε με μαθηματικό τρόπο τις παρακάτω εκφράσεις:
  - α. Το διπλάσιο ενός αριθμού
  - β. Ένας αριθμός αυξημένος κατά το μισό του
  - γ. Το μισό του αθροίσματος ενός αριθμού με το 2
  - δ. Η διαφορά δύο αριθμών διαιρεμένη με το 3
  - ε. Το άθροισμα του πηλίκου και του γινομένου δύο αριθμών
7. Να χρησιμοποιήσετε μια μεταβλητή για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τις παρακάτω φράσεις:
  - α. Το ποσό που θα πληρώσουμε για να αγοράσουμε 7 παγωτά αν γνωρίζουμε την τιμή του ενός παγωτού.
  - β. Το ποσό που θα πληρώσουμε για να αγοράσουμε 4 τετράδια και 3 στιλό αν γνωρίζουμε την τιμή του ενός τετραδίου και του ενός στιλό.
8. Να γράψετε με πιο απλό τρόπο τις παραστάσεις:
 

α. $x + x + x$	β. $x \cdot x \cdot x$	γ. $x + x + x + x$	δ. $x \cdot x \cdot x \cdot x$
----------------	------------------------	--------------------	--------------------------------
9. Να κάνετε τις πράξεις:
 

α. $2(a + 3)$	γ. $5(-a + 4)$	ε. $-4(-x + 2)$
β. $3(a - 2)$	δ. $-3(x + 1)$	στ. $-5(-x - 2)$
10. Να κάνετε τις πράξεις:
 

α. $2(a - 1 + \beta)$	γ. $-4(-x - y + 3)$	ε. $-3(4a - 2y)$
β. $3(2x + y - 2)$	δ. $(2a - \beta + 3) \cdot (-2)$	στ. $3(-4x - 5y + 4)$

11. Να κάνετε αναγωγή ομοίων όρων:

α.  $3x + 2x$

γ.  $x + 4x$

ε.  $-x - 4x$

β.  $-4x + 3x$

δ.  $5x - x$

στ.  $-x + x + 6x$

12. Να κάνετε αναγωγή ομοίων όρων:

α.  $3x + 2x + 4x$

γ.  $7x + 4x + 3x - 14x$

ε.  $3x - 5x + 2x + 3$

β.  $4x - 5x - x$

δ.  $-4x + 4x + x$

στ.  $-x + 5x + x + 2x + 6$

13. Να κάνετε αναγωγή ομοίων όρων:

α.  $4x - 3x + 2a$

γ.  $-10a + 3\beta + 4\beta - a + \beta$

ε.  $10z + 3z + 5\omega - 4z - 5\omega$

β.  $3x + 2a - 4x + a$

δ.  $-5x + 4x + 2y + 3y - x$

στ.  $5a + 2a + 3\beta + 4\beta - 3a$

14. Να κάνετε αναγωγή ομοίων όρων:

α.  $4x - 2a + 3y + a + y - x$

γ.  $2a + 3 + 4\beta + a + 4 - \beta + \gamma$

β.  $4a - 3a + 2\beta + 3\beta + \gamma + 2\gamma$

δ.  $-2x + 1 + 3x + 2y - 3z + 3y + z + 4$

15. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α.  $2(x - 4) + 3x$

γ.  $3(2x - 1) + x + 4$

ε.  $x + (1 - 2x) \cdot (-3)$

β.  $4x - 2(x + 3)$

δ.  $5(-x + 2) + x$

στ.  $4 + 5(2x - 1) - 6x$

16. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α.  $3(x - 4) + (x - 1) \cdot (-2)$

γ.  $2(x - 1) + 3(1 - 2x) - 6(x + 1)$

β.  $2(1 - 2x) + 3(-1 + x)$

δ.  $12x - 3(x - 1) - 2(x + 4)$

17. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α.  $-2(x - y) + 3(x - 1) + 2(3 + y)$

γ.  $(x + y) \cdot (-2) - 3(x + 1) + 2(2x + 2y - 1)$

β.  $2(2x - 3y) - 3(4x - y) + 1$

δ.  $-(2a + 3\beta) + 2(4a - \beta) - 3(a + 1)$

18. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α.  $2[x - 3(x + 1)]$

γ.  $3[2(x - 1) - 3(1 + 2x)] + x$

β.  $2x - [4(x - 2) - x]$

δ.  $7(x - 1) - 3[4 - 2(1 - 3x)]$

19. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = -[-2x + 3 - [2(1 - x) - 3(x + 1) + x] + 2(x - 1)]$$

20. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α.  $2x - 3y + 1$ , αν  $x = -1$  και  $y = -2$

γ.  $3a - 5 + a^2$ , αν  $a = -1$

β.  $-3x + 2y + z$ , αν  $x = 2$ ,  $y = -3$  και  $z = -4$

δ.  $-4a + 2x - 5$ , αν  $a = -3$  και  $x = -1$

21. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α.  $2x + 2y$ , αν  $x + y = -2$

γ.  $4x - 4y - 1$ , αν  $x - y = 2$

ε.  $-2x \cdot 4y$ , αν  $x \cdot y = 3$

β.  $-3y - 3y$ , αν  $x + y = -1$

δ.  $-5x + 5y + 2$ , αν  $x - y = -4$

22. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α.  $2(x - 2y) + x + 7y$ , αν  $x + y = 2$

γ.  $3(2x - 4y) + 4(x + 3y)$ , αν  $x = -2$

β.  $-2(x - 3y) + 3(y + x)$ , αν  $x = -1$  και  $y = -2$

23. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α.  $\frac{x+2}{3} - \frac{x}{2}$ , αν  $x = 4$

γ.  $\frac{1-3x}{4} + x - 2$ , αν  $x = 1$

β.  $\frac{2(x+2)}{3} - \frac{3x+1}{4}$ , αν  $x = -1$

δ.  $\frac{3-5x}{3} - \frac{x+1}{2}$ , αν  $x = -1$

24. Δίνεται η παράσταση:

$$A = 3(x - 2) - 2(1 + 2x) + 4 + 3x$$

α. Να την απλοποιήσετε.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της, όταν  $x = -\frac{1}{3}$ .

25. Δίνεται η παράσταση:

$$A = 2(-x) - 5[-3x + 2(1 - 4x)]$$

α. Να απλοποιήσετε την παράσταση, κάνοντας τις κατάλληλες πράξεις.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της, όταν  $x = \frac{5}{53}$ .

26. Δίνεται η παράσταση:

$$A = \frac{x-1}{2} + \frac{2x-1}{3}$$

α. Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης όταν:

$$x = \frac{5^4 \cdot 5^{-3}}{7^4} \cdot 7^3$$

27. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2(x - y) - 3(2x + y) + y$$

αν οι τιμές των  $x$  και  $y$  είναι αντίθετες.

28. Τέσσερις φίλοι μέτρησαν τα χρήματά τους. Ο Γιάννης είχε τα διπλάσια από τον Κώστα και 3 € λιγότερα. Ο Τάκης είχε όσα ο Κώστας και ο Γιάννης μαζί. Ο

Βασίλης είχε το  $\frac{1}{3}$  των χρημάτων του Τάκη.

α. Με τη βοήθεια μιας μεταβλητής να γράψετε τις αλγεβρικές παραστάσεις που εκφράζουν τα χρήματα του καθενός και τα χρήματα που έχουν όλοι μαζί.

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$x + (2x - 3) + [(2x - 3) + x] + \frac{1}{3}[(2x - 3) + x]$$

29. Ο Μιχάλης είναι 5 χρόνια μεγαλύτερος από τον Γιώργο και ο Ρένος έχει ηλικία ίση με το μισό της ηλικίας του Μιχάλη αυξημένο κατά το  $\frac{1}{3}$  της ηλικίας του Γιώργου. Με τη βοήθεια μιας μεταβλητής να εκφράσετε τις ηλικίες των τριών παιδιών. Ποια είναι η ηλικία του Ρένου αν η ηλικία του Γιώργου είναι 10 έτη;
30. Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί. Να εκφράσετε με μια μεταβλητή την περίμετρο του τριγώνου.
31. Η μια διάσταση ενός ορθογωνίου παραλληλόγραμμου είναι διπλάσια της άλλης. Να εκφράσετε με μία μεταβλητή:
- α. το εμβαδόν του ορθογωνίου  
β. την περίμετρο του ορθογωνίου
32. Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου διαφέρουν κατά 3. Να εκφράσετε με μία μεταβλητή το εμβαδόν του και την περίμετρό του.
33. Οι πλευρές ενός τριγώνου έχουν μήκη  $\alpha = x + y$ ,  $\beta = 3x - y$  και  $\gamma = 3y - x$  αντίστοιχα. Να βρείτε την περίμετρο του τριγώνου αν:
- α.  $x + y = 9$       β.  $\beta + \gamma = 16$
34. Οι πλευρές ενός τετραπλεύρου έχουν τα εξής μήκη:  
 $2x - y$ ,  $2x + 3$ ,  $y + 3$ ,  $2(y - x)$   
Να βρείτε την περίμετρο του τετραπλεύρου όταν  $x + y = 10$ .

### Γενικές ασκήσεις

35. Να κάνετε τις πράξεις:

α.  $\frac{1}{3}(6x + 3) - \frac{1}{2}(4x - 2)$       β.  $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6}$       γ.  $\frac{x - 1}{2} + \frac{2x - 1}{3} + 3 \cdot \frac{2x + 1}{4}$

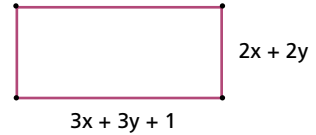
36. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = 3(-2x + y) + 2(x - 2y) - (-4x - y)$$

37. Αν  $2(x - y) = 6$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = (-2x - 3y) \cdot (-2) + 2(2x - y) - 6(x + y)$$

38. Η περίμετρος του ορθογωνίου του σχήματος είναι 32 m. Να βρείτε το εμβαδόν του.



39. Ο Νίκος είχε 40 € και αποφάσισε να αποταμιεύει κάθε μέρα 5 € και στο τέλος κάθε μήνα να δίνει από αυτά για διασκέδαση 25 €.
- α. Με τη βοήθεια μιας μεταβλητής να εκφράσετε τα χρήματα που θα έχει ο Νίκος στο τέλος κάθε μήνα.
- β. Να βρείτε τα χρήματα του Νίκου στο τέλος ενός έτους.

40. Αν  $3x + 2y = (-2)^2$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2(4x + 3y) - 17x - 12y + (4 : 2 - 3)^{10}$$

41. Αν  $5a = \beta - 3$ , να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 4(3a + \beta) - 2[(3^2 - 2^3)a + 3\beta] + 6$$

## ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

---

### ΘΕΜΑ 1ο

- α. Τι λέμε αλγεβρική παράσταση;
- β. Τι λέμε μεταβλητή;
- γ. Να γράψετε την επιμεριστική ιδιότητα.

### ΘΕΜΑ 2ο

Να γράψετε με τη βοήθεια μεταβλητών τις επόμενες εκφράσεις:

- α. Το τριπλάσιο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 24 ισούται με τον αριθμό αυτό.
- β. Το ποσό που θα πληρώσουμε για να αγοράσουμε 7 σιλό και 10 μοθύβια αν γνωρίζουμε την τιμή του ενός σιλό και του ενός μοθυβιού.
- α. Τα χρήματα που έχει ο Βασίλης αν γνωρίζουμε ότι έχει τόσα χρήματα όσο είναι το  $\frac{1}{3}$  των χρημάτων της Μαρίας και το  $\frac{1}{4}$  των χρημάτων της Άννας και 4 € ακόμη.

### ΘΕΜΑ 3ο

Να κάνετε αναγωγή ομοίων όρων:

- α.  $3x + x - 2x - x$
- β.  $x + 2y + 3x + 4y + 4$
- γ.  $7x - 5x - 3y + y$
- δ.  $a + a + 2\beta + 3\beta + a - \beta$

### ΘΕΜΑ 4ο

α. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

- i.  $2(x - 1) + 3(x + 2)$
- ii.  $2x - [4(x + 1) - x]$
- iii.  $3[2(1 + x) - 3(1 - 2x)] + 4x$

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$2(x - 3y) + x + 9y - 4$$

αν  $x + y = 1$ .

## 1.2 Εξισώσεις α΄ βαθμού

### Η έννοια της εξίσωσης

- Μέχρι τώρα έχουμε συναντήσει εξισώσεις σε απλές μορφές.

#### Παράδειγμα

Με τη βοήθεια των αρχικών ιδιοτήτων των πράξεων μπορούμε να λύσουμε τις εξισώσεις:

$$x + \alpha = \beta, x - \alpha = \beta, \alpha - x = \beta, \alpha x = \beta, \alpha : x = \beta$$

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με πιο σύνθετες περιπτώσεις.

- Γενικά:

**Εξίσωση** λέμε μια ισότητα που περιέχει έναν άγνωστο αριθμό  $x$ .

- **Λύση ή ρίζα** μιας εξίσωσης λέμε κάθε αριθμό που, αν αντικαταστήσουμε τον άγνωστο με αυτόν τον αριθμό, προκύπτει αληθής ισότητα.

#### Παράδειγμα

Η εξίσωση:

$$2x - 5 = -3$$

έχει λύση ή ρίζα τον αριθμό  $x = 1$ , γιατί, αν αντικαταστήσουμε σε αυτή το  $x$  με το 1, δίνει:

$$2 \cdot 1 - 5 = -3 \quad \text{ή} \quad -3 = -3$$

που είναι αληθής ισότητα.

- **Επίλυση** μιας εξίσωσης λέμε τη διαδικασία με την οποία βρίσκουμε τις λύσεις της.
- Τέλος, λέμε ότι κάνουμε **επαλήθευση** της λύσης μιας εξίσωσης όταν αντικαθιστούμε τον άγνωστο με τον αριθμό που βρήκαμε ως λύση της και εξετάζουμε αν προκύπτει πράγματι αληθής ισότητα.

## Τα δύο μέλη μιας εξίσωσης

- Έστω η εξίσωση:

$$3x - 4 = \frac{x - 1}{2} + 3$$

Η παράσταση που βρίσκεται αριστερά από το σύμβολο «=» λέγεται **πρώτο μέλος** της εξίσωσης ενώ η παράσταση που βρίσκεται δεξιά από το «=» λέγεται **δεύτερο μέλος** της εξίσωσης. Έτσι, έχουμε:

Πρώτο μέλος:  $3x - 4$

Δεύτερο μέλος:  $\frac{x - 1}{2} + 3$

## Χρήσιμες ιδιότητες των πράξεων

- Για την επίλυση μιας εξίσωσης χρησιμοποιούμε τις παρακάτω ιδιότητες:
  1. Αν και στα δύο μέλη μιας ισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή:

$$\text{αν } a = b, \text{ τότε } a + \gamma = b + \gamma$$

2. Αν και από τα δύο μέλη μιας ισότητας αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή:

$$\text{αν } a = b, \text{ τότε } a - \gamma = b - \gamma$$

3. Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας τα πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή:

$$\text{αν } a = b, \text{ τότε } a \cdot \gamma = b \cdot \gamma$$

4. Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας τα διαιρέσουμε με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή:

$$\text{αν } a = b, \text{ τότε } \frac{a}{\gamma} = \frac{b}{\gamma}, \text{ με } \gamma \neq 0$$

- Από τις ιδιότητες αυτές προκύπτει μια πολύ χρήσιμη και πρακτική ιδιότητα:

*Μπορούμε να διαγράψουμε και από τα δύο μέλη μιας ισότητας τον ίδιο αριθμό.*

Δηλαδή:

$$\text{αν } a + \gamma = \beta + \gamma, \text{ τότε } a = \beta \text{ και } \text{αν } a - \gamma = \beta - \gamma, \text{ τότε } a = \beta$$

### Παράδειγμα

Η εξίσωση:

$$2x + x + 5 = x + 3$$

γίνεται:

$$2x + 5 = 3 \text{ (διαγράφουμε τα } x)$$

ή ακόμα η εξίσωση:

$$x - 5 + 2x = -5 + 2x + 4$$

γίνεται:

$$x = 4 \text{ (διαγράφουμε τα } -5 \text{ και τα } 2x)$$

## Μεταφορά όρων από το ένα μέλος μιας εξίσωσης στο άλλο

- Από τις πλέον σπουδαίες και συχνά χρησιμοποιούμενες ιδιότητες είναι η επόμενη:

Σε μια εξίσωση μπορούμε να «μεταφέρουμε» όρους από το ένα μέλος της στο άλλο αλληλάζοντας το πρόσημό τους.

### Παράδειγμα

Έστω η εξίσωση:

$$3x - 4 = 2 + 2x$$

Για να «απομονώσουμε» τον άγνωστο στο πρώτο μέλος, κάνουμε τις εξής μεταφορές:

- μεταφέρουμε το  $2x$  στο πρώτο μέλος με αλλαγμένο πρόσημο:

$$3x - 2x - 4 = 2$$

- μεταφέρουμε τον αριθμό  $-4$  στο δεύτερο μέλος με αλλαγμένο πρόσημο:

$$3x - 2x = 4 + 2$$

Έτσι παίρνουμε  $x = 6$ .

- Ας δούμε τώρα τα βήματα που ακολουθούμε για να λύσουμε μια εξίσωση, όπως για παράδειγμα την:

$$2(x - 1) - 3(2 - x) = -(1 - x) + 5$$

Λύνουμε την εξίσωση στην Άσκηση 1.

Για να λύσουμε μια εξίσωση εργαζόμαστε ως εξής:

1. Κάνουμε τις πράξεις, αν υπάρχουν, και στα δύο μέλη.
2. Μεταφέρουμε τους όρους που περιέχουν τον άγνωστο  $x$  στο πρώτο μέλος και όλους τους άλλους στο δεύτερο μέλος **αλλάζοντας το πρόσημό τους**. Λέμε ότι «χωρίζουμε άγνωστους από γνωστούς όρους».
3. Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων στο πρώτο μέλος και τις πράξεις με τους αριθμούς στο δεύτερο μέλος.
4. Καταλήγουμε σε μια εξίσωση της μορφής:

$$ax = b$$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη με τον συντελεστή του αγνώστου, το  $a$ , και έχουμε:

$$\frac{ax}{a} = \frac{b}{a} \quad \text{ή} \quad x = \frac{b}{a} \quad (\text{με } a \neq 0)$$

• Μερικές χρήσιμες παρατηρήσεις:

1. Ο συντελεστής του  $x$  είναι το 1, γιατί  $1 \cdot x = x$ .  
Ο συντελεστής του  $-x$  είναι το  $-1$ , γιατί  $(-1) \cdot x = -x$ .
2. Αν καταλήξουμε σε μια εξίσωση της μορφής π.χ.  $-x = 4$ , τότε **αλλάζουμε τα πρόσημα** και στα δύο μέλη και παίρνουμε απευθείας  $x = -4$ .

### Άσκηση 1

Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(x - 1) - 3(2 - x) = -(1 - x) + 5$$

#### Λύση

Σύμφωνα με τα βήματα που εξηγήσαμε παραπάνω, πρώτα κάνουμε τις πράξεις στα δύο μέλη και έχουμε:

$$2x - 2 - 6 + 3x = -1 + x + 5$$

Χωρίζουμε τους άγνωστους από τους γνωστούς όρους. Οι όροι που αλλάζουν μέλος αλλάζουν και πρόσημο. Έχουμε:

$$2x + 3x - x = 2 + 6 - 1 + 5$$

Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων και πράξεις και προκύπτει:

$$4x = 12$$

Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου, το 4, και παίρνουμε:

$$\frac{4x}{4} = \frac{12}{4} \quad \text{ή} \quad x = 3$$

Έτσι η λύση είναι  $x = 3$ .

## Απαλοιφή παρονομαστών

Σε περίπτωση που έχουμε μια εξίσωση στην οποία εμφανίζονται παρονομαστές, τότε τη μετατρέπουμε σε μια άλητη εξίσωση χωρίς παρονομαστές. Αυτό γίνεται αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών. Η διαδικασία αυτή λέγεται **απαλοιφή παρονομαστών**.

### Άσκηση 2

Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{1}{3}(2x + 1) - \frac{x - 1}{2} = \frac{x + 2}{4}$$

#### Λύση

Πρώτα κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών:

$$\text{Ε.Κ.Π.}(3, 2, 4) = 12$$

Έχουμε:

$$12 \left[ \frac{1}{3}(2x + 1) - \frac{x - 1}{2} \right] = 12 \cdot \frac{x + 2}{4}$$

ή

$$\frac{12}{3}(2x + 1) - 12 \cdot \frac{x - 1}{2} = 12 \cdot \frac{x + 2}{4}$$

ή

$$4(2x + 1) - 6(x - 1) = 3(x + 2)$$

ή

$$8x + 4 - 6x + 6 = 3x + 6$$

ή

$$8x - 6x - 3x = -4 - 6 + 6$$

ή

$$-x = -4 \quad \text{ή} \quad x = 4$$

Όστε η λύση είναι  $x = 4$ .

### Άσκηση 3

Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{4x + 2}{2} = \frac{4x - 1}{3}$$

**Λύση**

Πρώτα θα κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών. Στην περίπτωση μας έχουμε ισότητα δύο κλασμάτων, οπότε τα χιαστί γινόμενα είναι ίσα:

$$3(4x + 2) = 2(4x - 1)$$

ή

$$12x + 6 = 8x - 2$$

ή

$$12x - 8x = -6 - 2$$

ή

$$4x = -8$$

ή

$$\frac{4x}{4} = \frac{-8}{4} \quad \text{ή} \quad x = -2$$

Έτσι η λύση είναι  $x = -2$ .

**Οι εξισώσεις  $0x = 0$  και  $0x = a$ , με  $a \neq 0$** 

Η εξίσωση της μορφής  $0x = 0$  αληθεύει για κάθε τιμή του αγνώστου  $x$  και λέγεται **ταυτότητα**.

Οι εξισώσεις, όμως, όπως οι  $0x = 4$ ,  $0x = -5$ , που είναι της μορφής  $0x = a$ , με  $a \neq 0$ , είναι **αδύνατες**. Δηλαδή δεν υπάρχει τιμή του  $x$  τέτοια ώστε  $0x = a$ .

Έτσι:

*Η εξίσωση  $0x = 0$  είναι ταυτότητα.*

*Η εξίσωση  $0x = a$ , με  $a \neq 0$ , είναι αδύνατη.*

**Άσκηση 4**

Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α.**  $2(x - 1) + 3(2x + 2) = 4(1 + 2x)$

**β.**  $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{5}{6}(x - 1)$

**Λύση**

α. Έχουμε διαδοχικά:

$$2(x - 1) + 3(2x + 2) = 4(1 + 2x)$$

ή

$$2x - 2 + 6x + 6 = 4 + 8x$$

ή

$$2x + 6x - 8x = 2 - 6 + 4$$

ή

$$0x = 0$$

Όστε η εξίσωση είναι ταυτότητα.

β. Κάνουμε, πρώτα, απαλοιφή παρονομαστών. Είναι Ε.Κ.Π.(2, 3, 6) = 6, οπότε η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{5}{6}(x - 1)$$

$$6\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right) = 6 \cdot \frac{5}{6}(x - 1)$$

$$\frac{6x}{2} + \frac{6x}{3} = 5(x - 1)$$

$$3x + 2x = 5x - 5$$

$$3x + 2x - 5x = -5$$

$$0x = -5$$

Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη.

**Εξισώσεις με παράμετρο**

Κάθε γράμμα που μπορεί να περιέχεται σε μια εξίσωση, εκτός από τον άγνωστο, λέγεται **παράμετρος** και η εξίσωση αυτή λέγεται **παραμετρική εξίσωση**.

**Άσκηση 5**

Δίνεται η εξίσωση:

$$-1 + \mu(x - 1) = 2(x + 1)$$

α. Αν  $\mu = 3$ , να λύσετε την εξίσωση.

β. Να βρείτε την τιμή του  $\mu$ , αν η εξίσωση έχει λύση  $x = -4$ .

γ. Να λύσετε την εξίσωση όταν  $\mu = 2$ .

**Λύση**

α. Για  $\mu = 3$ , η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned}-1 + 3(x - 1) &= 2(x + 1) \\ -1 + 3x - 3 &= 2x + 2 \\ 3x - 2x &= 1 + 3 + 2 \\ x &= 6\end{aligned}$$

Όστε έχει λύση  $x = 6$ .

β. Για  $x = -4$ , η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned}-1 + \mu[(-4) - 1] &= 2[(-4) + 1] \\ -1 + \mu(-5) &= 2(-3) \\ -5\mu &= -6 + 1 \\ -5\mu &= -5 \\ \mu &= 1\end{aligned}$$

Όστε η ζητούμενη τιμή είναι  $\mu = 1$ .

γ. Για  $\mu = 2$ , η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned}-1 + 2(x - 1) &= 2(x + 1) \\ -1 + 2x - 2 &= 2x + 2 \\ 2x - 2x &= 2 + 1 + 2 \\ 0x &= 5, \text{ αδύνατη}\end{aligned}$$

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

### Ερωτήσεις θεωρίας

1. Τι λέμε εξίσωση; Ποιο είναι το πρώτο και ποιο το δεύτερο μέλος μιας εξίσωσης;
2. Τι είναι η επίλυση μιας εξίσωσης;
3. Τι λέμε λύση ή ρίζα μιας εξίσωσης;
4. Τι είναι η επαλήθευση της λύσης μιας εξίσωσης;
5. Να εκφράσετε με λόγια τις παρακάτω ιδιότητες των πράξεων:
  - α. αν  $a = \beta$ , τότε  $a + \gamma = \beta + \gamma$  και  $a - \gamma = \beta - \gamma$
  - β. αν  $a = \beta$ , τότε  $a\gamma = \beta\gamma$
  - γ. αν  $a = \beta$ , τότε  $\frac{a}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$ , με  $\gamma \neq 0$
6. Πώς μεταφέρουμε όρους από το ένα μέλος μιας εξίσωσης στο άλλο;
7. Τι είναι η απαλοιφή παρονομαστών;
8. Ποια εξίσωση λέγεται: α. ταυτότητα, β. αδύνατη;

### Ερωτήσεις κλειστού τύπου

9. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:
  - α. Η εξίσωση  $0x = 0$  είναι αδύνατη.
  - β. Η εξίσωση  $2x - 2 = 2(x - 1)$  είναι ταυτότητα.
  - γ. Μπορούμε να μεταφέρουμε όρους από το ένα μέλος μιας εξίσωσης στο άλλο αλληλάζοντας το πρόσημό τους.
  - δ. Στην εξίσωση  $-2x = 4$  ο συντελεστής του αγνώστου είναι το 2.
  - ε. Αν  $a + \gamma = \beta + \gamma$ , τότε  $a = \beta$ .
  - στ. Ισχύει ότι  $-8 \cdot \frac{x - 1}{4} = -2x - 1$ .

10. Να αντιστοιχίσετε καθεμία από τις εξισώσεις της στήλης Α με τη λύση της στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $x + \alpha = \beta$	i. $x = \alpha - \beta$
β. $x - \alpha = \beta$	ii. $x = \beta - \alpha$
γ. $\alpha - x = \beta$	iii. $x = \alpha + \beta$
δ. $\alpha x = \beta$ , με $\alpha \neq 0$	iv. $x = \alpha\beta$
ε. $\frac{x}{\alpha} = \beta$ , με $\alpha \neq 0$	v. $x = \frac{\beta}{\alpha}$
στ. $\frac{\alpha}{x} = \beta$ , με $\beta \neq 0$	vi. $x = \frac{\alpha}{\beta}$

### Ασκήσεις

#### Οι βασικές εξισώσεις

11. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α.  $x + 4 = 6$

γ.  $x + 3 = -2$

ε.  $1 - x = 1$

β.  $x - 4 = -6$

δ.  $7 - x = 0$

στ.  $4 - x = -3$

12. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $3x = 6$

γ.  $-4x = 8$

ε.  $-x = -4$

β.  $2x = 2$

δ.  $-x = 1$

στ.  $-3x = 0$

13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $\frac{x}{3} = -1$

δ.  $\frac{x}{-2} = -2$

ζ.  $\frac{4}{x} = 2$

ι.  $\frac{3}{x} = 0$

β.  $\frac{1}{2} \cdot x = -2$

ε.  $\frac{x}{-3} = -\frac{1}{6}$

η.  $\frac{-5}{x} = -10$

ια.  $\frac{3}{x} = \frac{3}{x}$

γ.  $-\frac{2}{3} \cdot x = -4$

στ.  $0,4x = 0,04$

θ.  $3 = \frac{6}{x}$

ιβ.  $\frac{1}{2x} = 2$

14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $x + 3 = 0$

β.  $3x = 0$

γ.  $\frac{2}{x} = 0$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $2x - 4 = 8$

δ.  $4z - 8 = 0$

ζ.  $4 = 2x - 2$

β.  $4 - 2y = -4$

ε.  $3 - 3z = 9$

η.  $-3 = -2x + 1$

γ.  $3 + 2y = 6$

στ.  $2 + 2z = 6$

θ.  $8 = 3y + 2$

16. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $2x - 4 = x + 1$

δ.  $6 - 2y = y - 3$

ζ.  $5 + y = 2 - y + 1 - 2y$

β.  $x + 3 = 2 - x$

ε.  $10 + 2y = 4 - y$

η.  $y + 1 = 2 + y$

γ.  $x - 1 = 1 - x$

σ.  $3x + 4 - 2x - 1 = 0$

θ.  $2y + 3 = y + 1 + y + 2$

17. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $0,5x + 0,7 = 1,5x - 2,3$

γ.  $0,3x - 0,5 = 0,1x + 0,3$

β.  $0,1x - 0,2 = 0,5 - 0,2x$

δ.  $0,02x + 0,05 = 0,09$

Εξισώσεις με πράξεις

18. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $2 - 4(x + 4) = x - 2(4x - 5)$

γ.  $2(2 + x) - 3(x + 1) - 6x = x + 2$

β.  $12 - 3(1 - x) = 2(x + 2) - (9 - 8x)$

δ.  $20x - 5(x + 4) = 2 + 8(x - 1)$

19. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $5(2x - 5) + 105 - 6(3x + 4) = 0$

γ.  $12x - 6(x - 2) - 12(x - 2) - 5(x + 1) = 0$

β.  $4(2x - 1) = 3(3x - 3)$

δ.  $4(2x - 4) + 6(1 - 3x) - 3(x - 5) = 0$

20. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $-3(1 - x) + 12 = 20 - (3x - 1)$

γ.  $-(5x - 4) + 12(-2x + 6) = 18(x - 1)$

β.  $6(3x + 4) - 4(1 - x) = 12x - 2(4 - x)$

δ.  $3(x - 5) - 6(x - 7) = 4x - 36$

21. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $20x - 5(x + 4) - 2 = 8(x - 1)$

β.  $4(5x + 7) + 4(x - 1) - 3(x + 2) = 2(x - 3) - 2(x - 4) + 6$

γ.  $7x - 2(x + 1) + 4(x + 2) - 2(x - 10) = 3(x - 4) + 6(2x + 3)$

δ.  $16x - 2(x - 1) + 6(2x - 1) = -(1 + x) + 2(1 + 8x)$

ε.  $6(x - 1) - (5x - 3) - 2(x - 1) + x = -(x + 1) + 2x - 4$

22. Να λύσετε την εξίσωση:

$$3(3x - 1) + 4(x - 2) + 3(1 - x) = 2(3x + 1) + 2(4x - 1) - 6(x - 2)$$

23. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(x - 1) - (4x - 3) + 15(x + 1) = 5(2x + 3) + 7(2x + 3) + 10$$

24. Αν  $A = 3(1 + x) + 2(6 + x) + 5(x - 2) - 2(3 - x)$  και  $B = 2(x + 5) + 3(x - 4) - x + 3$ ,  
να βρείτε για ποια τιμή του  $x$  είναι  $A = B$ .

## Εξισώσεις με κλάσματα

25. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $\frac{2x+3}{3} = \frac{5+x}{3}$

γ.  $x-1 = \frac{5x-14}{8}$

ε.  $\frac{x-18}{7} = \frac{7x+9}{-2}$

β.  $\frac{x+1}{3} = \frac{x-2}{2}$

δ.  $\frac{x+1}{3} = x-1$

στ.  $\frac{3x-21}{20} = \frac{x}{30}$

26. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $\frac{x-2}{3} = \frac{x+1}{2}$

δ.  $\frac{-(x-7)+4(x-1)}{3} = \frac{3(x+2)-2x}{2}$

β.  $-\frac{4x+1}{2} = \frac{5-5x}{3}$

ε.  $\frac{-2x-(3x-1)}{2} = -\frac{2(x-3)}{3}$

γ.  $\frac{4(2x+1)-3(5-3x)}{12} = \frac{x+2}{6}$

στ.  $\frac{x-5-2(x-7)}{4} = \frac{x-9}{3}$

27. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $\frac{4x-(x+4)}{4} = \frac{1+4(x-1)}{10}$

γ.  $\frac{3x-1}{2} = \frac{2(x-1)+25-x}{3}$

β.  $\frac{4(x-1)-3(x+2)}{2} = 4-(x-4)$

δ.  $\frac{2(x+4)-(x-5)}{6} = -\frac{-2(x-1)+39+18}{18}$

28. Αν  $A = \frac{3(1+x)+2(6+x)}{6}$  και  $B = x+5$ , να βρείτε για ποια τιμή του  $x$  είναι  $A = B$ .

29. Να εξετάσετε αν οι εξισώσεις:

$$5(x-2) - 2(3-x) = 3x-4$$

και

$$\frac{6+x-3(x+2)}{3} = -\frac{1-x}{2}$$

έχουν την ίδια λύση.

30. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $\frac{x}{3} + \frac{2x}{5} = \frac{4x-16}{4}$

δ.  $\frac{x-3}{5} - \frac{7-x}{2} = \frac{7x+3}{2}$

β.  $\frac{2x}{3} + \frac{x-1}{3} = x - \frac{x+1}{2}$

ε.  $-4x + \frac{3x-2}{2} = 2 - \frac{6x+2}{5}$

γ.  $\frac{x+1}{2} - \frac{2x-5}{3} = \frac{3x-2}{6}$

στ.  $-\frac{4x}{3} + 2(x+1) = \frac{1+4x}{6}$

31. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha. \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{2}(x+2) = -x + \frac{2}{3}$$

$$\beta. \frac{2}{3}(x-4) - \frac{1}{4}(3x+7) = -\frac{5x-11}{6} + x - 8$$

$$\gamma. \frac{2}{3}(x-1) + \frac{x}{3} = \frac{1}{2}(x+6) - \frac{1}{6}(8-x)$$

$$\delta. \frac{1}{10}(6x-1) - \frac{1}{5}(x-2) - 3 = \frac{1}{2}(x-5)$$

32. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha. \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}(x+3) + 8x - 2(3x-1) = 10 + x + \frac{1}{2}(x+5)$$

$$\beta. 2x + \frac{1}{5}(x-6) - \frac{5}{6}(x+2) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}(x-4) + \frac{1}{2}x$$

33. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{3x-5}{3} - \frac{4x-7}{4} + \frac{2-3x}{4} + \frac{1-x}{2} = 3 - \frac{5x-7}{12} - \frac{2x+7}{3}$$

34. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{4} + \frac{2-x}{2} - \frac{5}{4}(x+1) = 2x - \frac{1}{2}(x-2) + 3(x-2)$$

35. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{1}{3} \left[ \frac{2x+7}{2} - (x-1) \right] = \frac{1}{2} [2x + 3(1-x) + 2]$$

36. Να λύσετε την εξίσωση:

$$5 + 9 \left( \frac{5x}{6} + \frac{10}{3} \right) = 2 \left[ \left( \frac{3x}{4} + \frac{5}{2} \right) + 4x \right]$$

37. Να λύσετε την εξίσωση:

$$x - \frac{3}{4}(x-2) = \frac{1}{3} \left[ -\frac{1}{2}(x-7) + 2x + 1 \right]$$

38. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{1}{10} [2(x-3) - 5(7x+3)] + 3(x-2) = \frac{1}{2} [-(x-7) + 2(x+1)]$$

39. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{1}{4} \left[ 2x + 7 - \frac{3}{2}(x - 1) \right] + \frac{1}{10} [4(x - 1) - 5(5x + 4)] = \frac{1}{2} \left[ 5 - \frac{1}{5}(x + 4) \right]$$

Εξισώσεις που είναι ταυτότητες ή αδύνατες

40. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $x + 3 = x$     β.  $2(x - 1) = 2x - 2$     γ.  $3(x - 1) - x = 2x - 3$     δ.  $\frac{1}{2}x = \frac{x - 1}{2} + 1$

41. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων των εξισώσεων:

α.  $2x - 6 = 2$     β.  $2x - 6 = 2x$     γ.  $2x - 6 = 2(x - 3)$

42. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α.  $2(x - 1) - x = 3(x + 1) - 2x$     δ.  $x - \frac{4x - 1}{8} = \frac{x + 1}{2} + \frac{3}{8}$   
 β.  $4 - (x - 1) = 3 - x$     ε.  $\frac{6x - 1}{3} - \frac{2x + 1}{2} = x + 1 - \frac{5}{6}$   
 γ.  $1 + 2(3x - 1) = 6(x + 1) - 7$     στ.  $\frac{3x - 1}{3} = \frac{2x + 1}{2}$

Εξισώσεις με παράμετρο

43. Η εξίσωση  $(\mu - 1)x + 4 = 6x$  έχει λύση τον αριθμό  $x = 2$ . Να βρείτε την τιμή του  $\mu$ .

44. Δίνεται η εξίσωση:

$$(\mu - 3)x = \mu - 2$$

- α. Να λύσετε την εξίσωση όταν  $\mu = 3$ .  
 β. Να λύσετε την εξίσωση όταν  $\mu = 5$ .  
 γ. Για ποια τιμή του  $\mu$  έχει ως λύση το  $x = 3$ ;

45. Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\eta$  οι παρακάτω εξισώσεις είναι αδύνατες:

α.  $(\eta + 2)x = \eta$     β.  $\eta x - 2x = 4$

46. Δίνεται η εξίσωση:

$$\eta x + 2x = 3(x - 1) + 2 + \eta$$

- α. Να τη γράψετε στη μορφή  $ax = \beta$ .  
 β. Να τη λύσετε όταν η τιμή του  $\eta$  είναι  $\eta = 2$ .  
 γ. Για ποια τιμή του  $\eta$  είναι ταυτότητα;

47. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου  $\mu$  για την οποία η λύση της εξίσωσης:

$$\frac{2x - 1}{5} = x - 2$$

είναι λύση και της εξίσωσης:

$$\mu x + 2(x - 1) = 3\mu + 4$$

48. Να αποδείξετε ότι, αν η εξίσωση:

$$(\mu - 1)x + 4 = 2$$

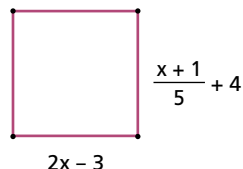
είναι αδύνατη, τότε η εξίσωση:

$$\mu x - x = 1 - \mu$$

είναι ταυτότητα.

### Προβλήματα

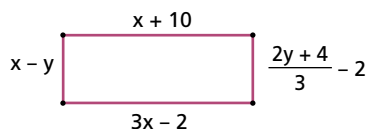
49. Το διπλανό σχήμα είναι τετράγωνο. Να βρείτε την τιμή του  $x$ .



50. Το διπλανό σχήμα είναι ορθογώνιο. Να βρείτε:

α. τις τιμές των  $x$  και  $y$

β. την περίμετρο και το εμβαδόν του



51. Οι γωνίες  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  ενός τριγώνου  $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$  είναι αντίστοιχα ίσες με:

$$\hat{A} = \omega + 10^\circ, \hat{B} = 2\omega - 10^\circ, \hat{\Gamma} = 3\omega$$

Να βρείτε την τιμή του  $\omega$  και τις γωνίες του τριγώνου.

52. Ένα ισοσκελές τρίγωνο  $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$  με κορυφή το  $A$  έχει:

$$AB = 3x - 5 \quad \text{και} \quad A\Gamma = \frac{2(x - 1)}{3} + x + 1$$

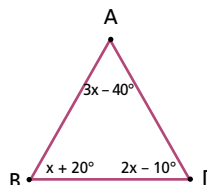
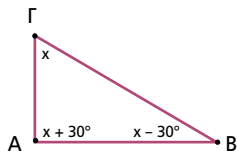
Να βρείτε την τιμή του  $x$ .

53. Οι πλευρές ενός τριγώνου  $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$  έχουν τα εξής μήκη:

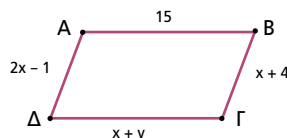
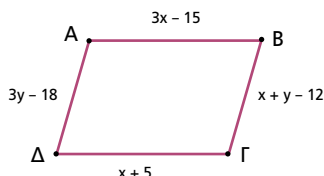
$$\alpha = 4x + 2, \beta = \frac{x + 10}{3} + 3x, \gamma = 4(x - 1) + \frac{x + 16}{3}$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του  $x$  ώστε το τρίγωνο να είναι ισόπλευρο.

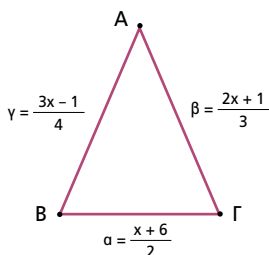
54. Ένα τραπέζιο έχει εμβαδόν  $21 \text{ m}^2$ , ύψος  $u = 3 \text{ m}$  και μια βάση ίση με  $5 \text{ m}$ . Να βρείτε τη δεύτερη βάση του.
55. Στα παρακάτω τρίγωνα να βρείτε τις γωνίες τους:



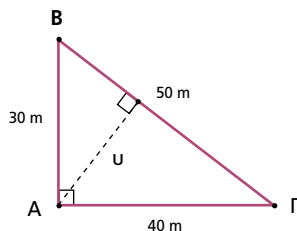
56. Στα παραλληλόγραμμα που φαίνονται στα επόμενα σχήματα να βρείτε τις τιμές του  $x$  και τις πλευρές τους.



57. Το παρακάτω σχήμα παριστάνει ένα τρίγωνο και δίνονται οι πλευρές του σε σχέση με το  $x$ .
- Να βρείτε την τιμή του  $x$ , αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές με κορυφή το A.
  - Να βρείτε την τιμή του  $x$ , αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές με κορυφή το B.
  - Μπορεί το τρίγωνο να είναι ισοπλευρο;



58. Να βρείτε το εμβαδόν και το ύψος του ορθογωνίου τριγώνου του σχήματος.



## ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

### ΘΕΜΑ 1ο

Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της στήλης Α με τη λύση της στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $3x - 5 = +1$	ι. ταυτότητα
β. $4 + x = 2x$	ii. $x = 2$
γ. $3x = -8 - 1$	iii. αδύνατη εξίσωση
δ. $0x = 2$	iv. $x = 4$
ε. $0x = 0$	v. $x = -3$

### ΘΕΜΑ 2ο

α. Να λύσετε την εξίσωση:

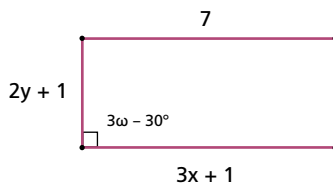
$$3 + \frac{x}{2} = x + \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

β. Για ποια τιμή του  $\mu$  η παρακάτω εξίσωση έχει ίδια λύση με την εξίσωση (1);

$$3\mu(x-1) + \frac{3\mu}{2} = 2x + \frac{5}{2}$$

### ΘΕΜΑ 3ο

Η περίμετρος του ορθογωνίου του σχήματος είναι 20 m. Να βρείτε τις τιμές των  $x$ ,  $y$  και  $\omega$  (σε μοίρες).



### ΘΕΜΑ 4ο

Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{1}{4}(x+4) - 7 = (1-x) \cdot \frac{1}{7} + \frac{x-23}{4}$$

Το βιβλίο αυτό αποτελεί απαραίτητο βοήθημα για τον μαθητή της Β΄ Γυμνασίου, καθώς ανταποκρίνεται στη σύγχρονη προσέγγιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών και στις νέες διδακτικές οδηγίες. Ακολουθεί τα κεφάλαια του σχολικού βιβλίου και καλύπτει πλήρως την ύλη του.

Κάθε μάθημα περιλαμβάνει:

- **Αναλυτική παρουσίαση της θεωρίας** με απλή και κατανοητή γλώσσα. Επεξηγούνται όλα τα θεωρητικά στοιχεία, ενώ η αφομοίωση της γνώσης επιτυγχάνεται χάρη στη χρήση πινάκων, διαγραμμάτων, σχημάτων και την αξιοποίηση πολλών εύστοχων παραδειγμάτων.
- **Ερωτήσεις θεωρίας, ασκήσεις και προβλήματα για λύση** που βοηθούν στην εμπέδωση της νέας γνώσης
- **Κριτήριο αξιολόγησης**

Στο τέλος του βιβλίου δίνονται οι απαντήσεις σε όλες τις συμπληρωματικές ασκήσεις και τα προβλήματα για λύση καθώς και στα κριτήρια αξιολόγησης. Ακολουθούν πλήρεις και αναλυτικές απαντήσεις σε όλες τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου.

Από τις εκδόσεις **ΜΕΤΑΙΧΜΙΟ** κυκλοφορεί:

## **ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**

Μαθηματικά

Πέτρος Μάρκος

ISBN:978-618-03-2320-7



9 786180 323207

ΒΟΗΘ. ΚΩΔ. ΜΗΧ/ΣΗΣ 82320

[metaixmio.gr](http://metaixmio.gr)